Mathematik und Spiele

tecer

19.2.2025

Teil 1 - Spieltheorie

Historie

Wichtige Player:

- Ernst Zermelo (Auswahlaxiom) 1913: Bestimmtheitssatz.
- John von Neumann (Rechnerarchitektur) 1928: Minimax-Theorem.
- John Nash ("A beautiful mind") 1950: Nash-Gleichgewicht (Nobelpreis 1994).
- John Conway (Game of Life) 1976: On numbers and games.

Was ist Spieltheorie?

Eine Sparte der Mathematik und verwandter Wissenschaften (vor allem Ökonomie), in der es darum geht, “strategische Szenarios” zu formalisieren und zu analysieren. Ein Spiel im Sinne der Spieltheorie wird durch eine (normalerweise endliche) Menge an Spielern und durch deren Möglichkeiten, miteinander unter Einhaltung der Spielregeln zu spielen, d.h. deren “Strategien”, definiert.

Eine weiterverbreitete Definition der Spieltheorie lautet auch: “Das Thema der Spieltheorie sind Situationen, in denen der Ausgang für einen Spieler nicht nur von seinen eigenen Entscheidungen, sondern auch vom Verhalten der anderen Spieler abhängt”.

Determiniertheit

Zermelo versuchte die Frage zu beantworten, ob beim Schach (oder einem anderen *endlichen Zweipersonen-Nullsummenspiel mit perfekter Information*) bei jeder Stellung prinzipiell feststeht, dass einer der Spieler - wenn er richtig spielt - den Gewinn (oder ein Remis) *erzwingen* kann.

Die Antwort lautet tatsächlich “ja”, womit diese Klasse von Spielen eigentlich uninteressant werden (da vollständig determiniert). In der Praxis ist es bei komplexeren Spielen wie Schach allerdings doch nicht so einfach, da die Entscheidungsmöglichkeiten sehr schnell sehr groß werden (trotzdem: endlich).

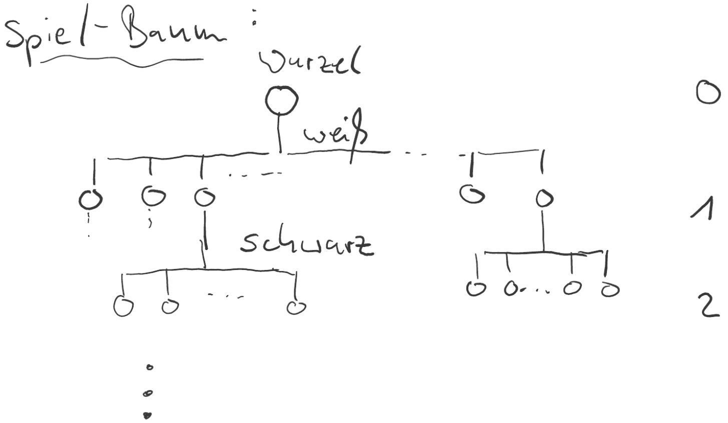
Bestimmtheitssatz Zermelo

Falls ein Spiel die folgenden Bedingungen erfüllt

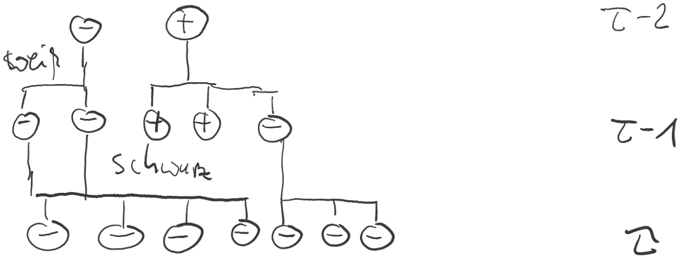
- Zwei-Personen-Spiel
- Der Betrag, den ein Spieler gewinnt, verlieren die anderen Spieler (*Nullsummenspiel*)
- Anzahl an Zugmöglichkeiten ist begrenzt (*Endliches Spiel*).
- Jeder Spieler kennt alle Informationen des aktuellen Spielstandes (*perfekte Information*)

ist es *strikt determiniert*, in jeder Spielsituation kann einer der Spieler entweder seinen Sieg oder ein Remis erzwingen.

Idee des Beweises (z.B. für Schach)



Idee des Beweises (z.B. für Schach) II



(oBdA: τ gerade)

Wie bleiben Spiele interessant?

Abgesehen von der Komplexität:

- Die Gegenspieler
- Der Zufall

Formalisierung – Normalform

Voraussetzung 1: Nullsummenspiele (ist ziemlich einschränkend und wird später gelockert).

Voraussetzung 2: Jeder Spieler wählt vor dem Spiel eine Strategie, die nicht mehr verändert wird (es gibt kein Lernen während des Spiels, impliziert *perfekte Information*).

Voraussetzung 3: Der Zufall wird nur über Erwartungswerte eingeführt, das Ziel der Spieler ist es, im Mittel über viele Partien möglichst viel zu gewinnen.

Formalisierung – Normalform

Darstellung der *Normalform* für 2 Spieler in Matrixform:

Spieler A \ Spieler B	Option B1	Option B2	Option B3
Option A1	3	-2	2
Option A2	1	0	4
Option A3	-4	-3	1

(zum Vergleich: *Extensivform* beim Schach-Beweis)

Minimax und Gleichgewicht

Strategie jedes Spielers: Minimierung des maximalen Verlustes oder Maximierung des minimalen Gewinns (beim Nullsummenspiel äquivalent).

Spieler A bildet also das Minimum jeder Zeile, Spieler B das Maximum jeder Spalte

Spieler A \ Spieler B	Option B1	Option B2	Option B3	Zeilen-Min.
Option A1	3	-2	2	-2
Option A2	1	0	4	0
Option A3	-4	-3	1	-4
Spalten-Max.	3	0	4	

Spieler A wählt das Maximum der Zeilenminima, Spieler B das Minimum der Spaltenmaxima.

Stabilität

Weil hier das Minimum der Spaltenmaxima und das Maximum der Zeilenminima identisch sind (=0), ist die Wahl A2 / B2 ein stabiler Gleichgewichtspunkt, d.h. selbst wenn Spieler A die Strategie von Spieler B durchschaut, wählt er dennoch A2 (und entsprechend für Spieler B).

Eine kleine Änderung der Regeln zerstört jedoch die Stabilität:

Spieler A \ Spieler B	Option B1	Option B2	Option B3	Zeilen-Min.
Option A1	3	-2	2	-2
Option A2	-1	0	4	-1
Option A3	-4	-3	1	-4
Spalten-Max.	3	0	4	

Dominierende und dominierte Strategien

Eine Strategie ist *dominant*, wenn sie unabhängig von den Handlungen des Gegenspielers immer optimal ist.

Eine Strategie ist *dominiert*, wenn sie unabhängig von den Handlungen des Gegenspielers niemals optimal ist.

Im Beispiel:

Option A2 ist für Spieler A die dominante Strategie (worst-case: -1), Option B2 ist für Spieler B die dominante Strategie (worst-case: 0).

Aber wir haben gesehen: die Situation ist nicht "stabil", weil (wegen der perfekten Information) die Spieler das gegenseitig wissen und daher ihre Wahl ändern würden.

UND: die Wahl von A3 bzw. B3 ist jeweils dominierte Strategie, d.h. würde niemals gewählt werden, kann also zur Vereinfachung eliminiert werden.

Gemischte Strategien

Bisher: reine Strategie, bei der immer die gleiche Wahl getroffen wird. Aber dort gibt es nicht immer ein stabiles Gleichgewicht, ausserdem ist der Zufall noch nicht einbezogen!

Jetzt: Auswahl aus den reinen Strategien mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten.

Erwartungswert (erwartete Auszahlung) beim Beispiel:

$E^A_{A1}(p^B) = 3 * p^B - 2 * (1 - p^B)$ (erwartete Auszahlung an Spieler A für die Wahl von A1, wenn Spieler B mit Wahrscheinlichkeit p^B B1 wählt)

$E^A_{A2}(p^B) = -1 * p^B + 0 * (1 - p^B)$

Gleichsetzen der beiden Erwartungswerte ergibt $p^B = 1/3$, d.h. Spieler B wählt mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 B1 und mit der Wahrscheinlichkeit 2/3 B2.

Ensprechende Berechnung umgekehrt für Spieler A führt zu $p^A = 1/6$, d.h. Spieler A wählt mit 1/6 A1 und 5/6 A2.

Minimax-Theorem

Minimax-Theorem (von Neumann)

Für jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel gibt es einen Sattelpunkt in gemischten Strategien.

Nash-Gleichgewicht

Nash zeigte, dass auch für nicht-Nullsummenspiele unter gewissen Voraussetzungen (an die Auszahlungsfunktion und die Strategiemengen) immer Gleichgewichtspunkte existieren:

Nash-Gleichgewicht

Das *Nash-Gleichgewicht* ist ein Strategiepaar (bei mehr als 2 Spielern: Tupel), bei dem es sich für keinen Spieler auszahlt, als einziger die Strategie zu ändern.

Beispiel Gefangenendilemma

Zwei (schuldige) Straftäter werden überführt und haben die Wahl, zu gestehen oder zu schweigen. Wenn beide schweigen erhalten sie jeweils ein Jahr Haft, gesteht nur einer der beiden, erhält der Geständige keine Haft und der nicht geständige 10 Jahre. Gestehen beide, so bekommen beide 9 Jahre Haft.

In Matrixform:

Person A \ Person B	Schweigen	Gestehen
Schweigen	(-1,-1)	(-10,0)
Gestehen	(0,-10)	(-9,-9)

Führt dazu, dass “gestehen” für beide Spieler die optimale Strategie ist (im Sinne der Minimierung des maximalen Verlusts, hier: des Gefängnisaufenthalts) und keiner der beiden einen Anreiz hat, seine Strategie zu ändern. Dennoch: nicht optimal!

Anmerkung kooperative Spiele

Das Gefangenendilemma deutet schon in Richtung des nächsten Spiel-Typs, nämlich den kooperativen Spielen. Hier gehen die Spieler untereinander (bindende!) Koalitionen ein.

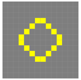
Auch hier entspinnt sich eine Theorie über die möglichen Lösungsstrategien, es gibt mehrere Ansätze, wie optimale Koalitionen gebildet werden können.

Teil 2 - Game of Life

Historie

Von John Conway entworfenes Spiel auf Basis eines zweidimensionalen "zellulären Automaten".

Im Sinne der Spieltheorie eigentlich ein "0-Spieler Spiel", da der "Ausgang" des Spieles bereits mit der initialen Situation festgelegt ist – in diesem Sinne also bereits von Anfang an determiniert.

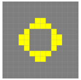


Regeln

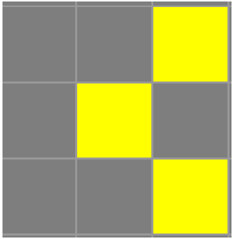
Klassische Regeln (auf einem unendlichen 2-dimensionalen Raster von “Zellen”)

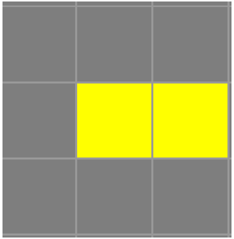
1. Eine lebende Zelle lebt auch in der Nachfolgegeneration, wenn sie 2 oder 3 lebendige Nachbarzellen hat.
2. Eine tote Zelle wird lebendig, wenn sie genau 3 lebendige Nachbarzellen hat.

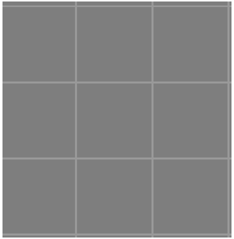
Diese Regeln werden für jede Generation immer gleichzeitig für alle Positionen ausgewertet, also nicht zeitlich nacheinander oder in einer bestimmten Reihenfolge!



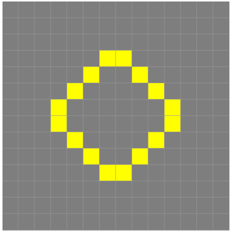
Überleben, Geburt und Tod

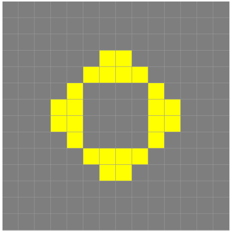
1


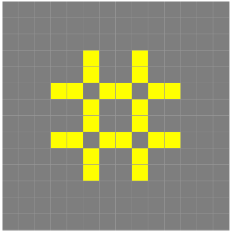
2


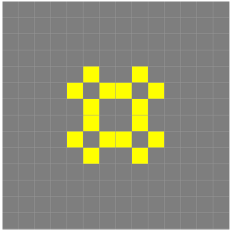
3


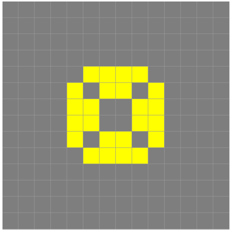
Oszillationen

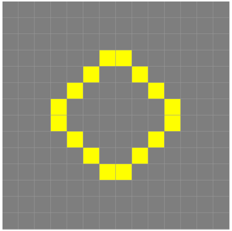
1


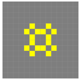
2


3


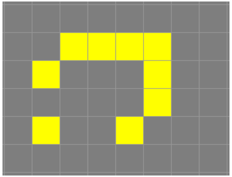
4


5


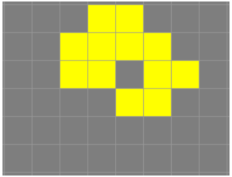
6




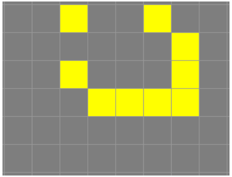
Gleiter



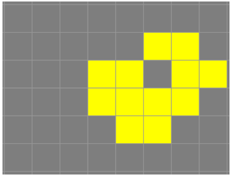
1



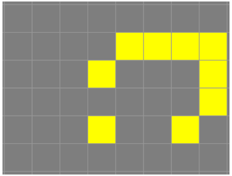
2



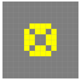
3



4



5

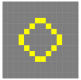


Interpretation als Dynamisches System

Dynamisches System

Ein Dynamisches System ist beschrieben durch seinen aktuellen Zustand im sogenannten *Phasenraum* und durch eine eindeutige Vorschrift, diesen aktuellen Zustand weiterzuentwickeln - in diskreten Zeitschritten oder in kontinuierlicher Zeit.

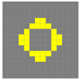
In diesem Sinne kann Conway's Game of Life als diskretes Dynamisches System verstanden werden, bei dem die Vorschrift der Evolution der Population entspricht.



Spezielle Orbits

Die zeitliche Entwicklung eines Dynamischen Systems, ausgehend von seinem Anfangszustand, wird als “Orbit” (innerhalb des Phasenraums) bezeichnet. Ein Orbit, der immer am gleichen Punkt im Phasenraum bleibt, wird “Gleichgewichtslage” genannt. Entsprechend gibt es auch “periodische Orbits”, bei denen der Zustand des Systems immer wieder zum ursprünglichen Zustand zurückkehrt.

Ein Orbit kann ein Attraktor oder ein Repellor sein, wenn sich Zustände in seiner Nähe immer auf ihn “zubewegen” oder sich immer von ihm “entfernen”.



Übersetzungen

Gleichgewichtslage: Keine lebende Zelle. Ist auch ein Attraktor.

Periodischer Orbit: “Oszillatoren”.

Doch: Wie behandelt man z.B. Gleiter? Oder mehrere Objekte im gleichen Raster?

Möglich: Einbettung eines “Sub-Systems” in das Dynamische System, der den Gleiter in seinem eigenen Referenzsystem betrachtet, dort ist er wieder nur ein periodischer Orbit.

Turing-Vollständigkeit

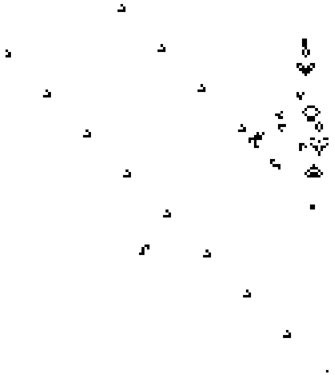
Ein weiterer Aspekt von Conway's Game of Life: es ist Turing-vollständig.

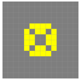
Mit Hilfe von

- Gleiter-Kanonen
- Gleiter-Reflektoren
- Gleiter-Duplikatoren
- Gleiter-"Eatern"

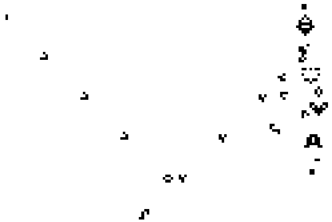
können Logik-Gatter gebaut werden!

1 AND 1

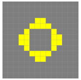




1 AND 0



0 AND 1



0 AND 0

NOT 0

NOT 1

Referenzen I

Fragen / Anmerkungen?

- “Mathematische Spieltheorie: Ein historisch-exemplarischer Abriß” von G. Nickel und M. Wächter, in: Symposium Spieltheorie, Berlin, 1998.
- “A Short Introduction to Game Theory” von H. Hotz.
- `https://www.spieltheorie.de/`
- Wikipedia, speziell `https://en.wikipedia.org/wiki/Minimax`
- “The game of life in a glider’s frame of reference” von M. Biehl und N. Virgo, in: Workshop The Distributed Ghost, ALIFE 2023
- “Building a computer in Conway’s game of life” von Nicolas Loizeau `https://www.nicolasloizeau.com/gol-computer`